Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022

CLASA a V-a

Subiectul 1. Se consideră cifrele nenule a și b și numărul $A=\overline{aba}+\overline{aab}+\overline{baa}$. Aflați numerele $\overline{ab}$ pentru care numărul A este cel mai mare număr de trei cifre posibil.

Subiectul 2. Un număr natural de trei cifre se numeşte *curios*, dacă produsul cifrelor sale este egal cu triplul sumei cifrelor sale, iar una dintre cifre este egală cu suma celorlalte două cifre ale acestuia. Aflați toate numerele curioase.

Gazeta Matematică

Subiectul 3. Copiii clasei a V-a B au scris pe tablă toate numerele naturale de la 1 la 2023, folosind culorile roșu, galben și albastru, respectând următoarele reguli:

(i) suma dintre un număr scris cu roșu și un număr scris cu galben este întotdeauna impară;
(ii) suma dintre un număr scris cu roșu și un număr scris cu albastru este întotdeauna impară;
(iii) oricum alegem două numere scrise cu galben, diferența dintre cel mai mare și cel mai mic se împarte exact la 4;
(iv) numărul 2021 este galben.

Calculați cea mai mare sumă posibilă a numerelor albastre.

Subiectul 4. Suma a 4 numere diferite este 2022. Împărțind fiecare dintre cele 4 numere la un număr natural nenul n, se obțin resturi egale cu 3 sau 4. Știind că suma tuturor acestor resturi este egală cu 13, determinați :

a) numărul resturilor egale cu 3 ;
b) cel mai mic număr n cu proprietățile din enunț.

Timp de lucru: 2 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!

Concursul „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XV-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2022

BAREM DE CORECTARE CLASA A V-A

Subiectul 1. Se consideră cifrele nenule a și b și numărul $A=\overline{aba}+\overline{aab}+\overline{baa}$. Aflați numerele $\overline{ab}$ pentru care numărul A este cel mai mare număr de trei cifre posibil.

Soluție: $A=222\cdot a+111\cdot b=111\cdot(2a+b)$. 3p

A este cel mai mare număr de trei cifre posibil dacă și numai dacă $2a+b=9$ 2p

Numerele $\overline{ab}$ sunt: 17, 25, 33, 41. .... 2p

Subiectul 2. Un număr natural de trei cifre se numește *curios*, dacă produsul cifrelor sale este egal cu triplul sumei cifrelor sale, iar una dintre cifre este egală cu suma celorlalte două cifre ale acestuia. Aflați toate numerele curioase.

SGM 4/2022, Neculai Stanciu

Soluție: Fie $x=\overline{abc}$ numărul căutat, cu a, b, c cifre, $a\neq 0$. Avem $abc=3(a+b+c)$ 1p

Dacă $a=b+c$, atunci $abc=3(a+a)$, deci $abc=6a$ și cum $a\neq 0$, obținem $bc=6$ 1p

Rezultă soluțiile: 716, 761, 523, 532. .... 1p

Dacă $b=a+c$, atunci $abc=3(b+b)$, deci $abc=6b$ și cum $b\neq 0$, obținem $ac=6$ 1p

Rezultă soluțiile: 176, 671, 253, 352. .... 1p

Dacă $c=a+b$, atunci $abc=3(c+c)$, deci $abc=6c$ și cum $c\neq 0$, obținem $ab=6$ 1p

Rezultă soluțiile: 167, 617, 235, 325. .... 1p

Subiectul 3. Copiii clasei a V-a B au scris pe tablă toate numerele naturale de la 1 la 2023, folosind culorile roșu, galben și albastru, respectând următoarele reguli:

(i) suma dintre un număr scris cu roșu și un număr scris cu galben este întotdeauna impară;

(ii) suma dintre un număr scris cu roșu și un număr scris cu albastru este întotdeauna impară;

(iii) oricum alegem două numere scrise cu galben, diferența dintre cel mai mare și cel mai mic se împarte exact la 4;

(iv) numărul 2021 este galben.

Calculați cea mai mare sumă posibilă a numerelor albastre.

Soluție: Din (i) rezultă că numerele roșii și cele galbene au parități diferite, iar din (ii) rezultă că numerele roșii și cele albastre au parități diferite. 1p

Așadar numerele galbene și cele albastre au aceeași paritate. Cum 2021 este galben, rezultă că numerele albastre și cele galbene sunt impare. 1p

Deoarece $2021-2017=4$, rezultă că și 2017 este galben. 1p

Analog obținem că toate numerele 1, 5, 9, ..., 2017, 2021 sunt galbene. Rezultă că numerele albastre sunt: 3, 7, 11, ..., 2019, 2023. .... 1p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

$S=3+7+\ldots+2023=(3+0\cdot4)+(3+1\cdot4)+\ldots+(3+505\cdot4)$ 1p

$S=3\cdot506+4\cdot(1+2+\ldots+505)=1518+2\cdot505\cdot506$ 1p

$S=512578$ 1p

Subiectul 4. Suma a 4 numere diferite este 2022. Împărțind fiecare dintre cele 4 numere la un număr natural nenul *n*, se obțin resturi egale cu 3 sau 4.
Știind că suma tuturor acestor resturi este egală cu 13, determinați:
a) numărul resturilor egale cu 3;
b) cel mai mic număr *n* cu proprietățile din enunț.

Soluție: a) Fie *x* numărul resturilor egale cu 3 și *y* numărul resturilor egale cu 4.
Din ipoteză, $x+y=4$ și $3x+4y=13$ 1p
$y=(3x+4y)-(3x+3y)=13-12=1$, deci $x=3$. 1p
b Deoarece 4 este un rest prin împărțirea la *n*, rezultă că $n\geq5$. 1p
Din **a)** rezultă că cele 4 numere sunt de forma $n\cdot a+3,\ n\cdot b+3,\ n\cdot c+3,\ n\cdot d+4$. 1p
$n(a+b+c+d)+13=2022$, deci $n(a+b+c+d)=2009=7\cdot7\cdot41$ 1p
Rezultă că $n=7$ 1p
Pentru $n=7$, numerele 10, 17, 24 și 1971 au proprietățile din enunț. 1p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro